Chapitre 11

Fonctions linéaires

I. Proportionnalité et fonction linéaire

Définition 1:

a est un nombre donné.
Une fonction linéaire f de coefficient a est une fonction qui, à tout nombre x, associe le nombre ax. (c'est le produit de a par x)
On la note : $f : x \mapsto ax$
On dit que : $f(x)$ est l'image de x par la fonction f, et on écrit $f(x) = ax$.

Exemple 1:

La fonction $f : x \mapsto 3x$ est la fonction linéaire de coefficient 3.

- L'image de 5 est $f(5) = 3 \times 5 = 15$.
- L'image de (-3) est $f(-3) = -3 \times 3 = -9$.
- L'image de 0 est $f(0) = 3 \times 0 = 0$.

Remarque :

On peut regrouper ces résultats dans un tableau :

x	5	-3	0
$f(x)$	15	-9	0

Ce tableau est un tableau de proportionnalité.
Le coefficient de proportionnalité est 3.
On a $f(x) = 3x$

Exemple 2:

- $h : x \mapsto -5x$ est la fonction linéaire de coefficient -5
  $h(4) = -5 \times 4 = -20$ donc l'image de 4 par h est -20
  L'antécédent de -15 par h est $-15 : (-5) = 3$
- $g : x \mapsto 4x + 5$ n'est pas une fonction linéaire
- $i : x \mapsto 2x^2$ n'est pas une fonction linéaire
- $j : x \mapsto \dfrac{1}{3}x$ est la fonction linéaire de coefficient
- Le périmètre d'un carré de côté x est égal à $4x$.
  Cette situation est modélisée par la fonction linéaire $f : x \mapsto 4x$

Propriété 1 :

1. L'image du nombre 0, par une fonction linéaire est 0
2. L'image du nombre 1, par une fonction linéaire est a
3. Tout nombre admet un unique antécédent par une fonction linéaire de coefficient $a \neq 0$
4. La fonction qui modélise une situation de proportionnalité est une fonction linéaire dont le coefficient est le coefficient de proportionnalité.

Exemple 3:

Ce tableau peut-il être celui d'une fonction linéaire ? Si oui, quel est son coefficient :

x	0	2	10
$g(x)$	0	5	25

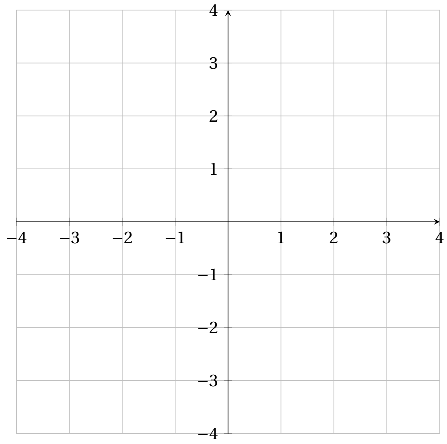
II. Représentation graphique

Propriété 2 :

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a, est l'ensemble des points de coordonnées $(x; ax)$
C'est une droite qui passe par l'origine .
Le nombre a s'appelle le coefficient directeur de la droite.

Exemple 4:

Dans un repère, représenter graphiquement les fonctions : $f: x \mapsto 2x$ et $g: x \mapsto \frac{-x}{2}x$



f et g sont des fonctions linéaires donc leurs représentations graphiques sont des droites qui passent par l'origine 0.

Pour tracer ces droites, il suffit de calculer pour chaque fonction les coordonnées d'un autre point.

On peut calculer $f(1) = 2$ et $g(2) = \frac{-2}{2} = -1$. (on choisit une abscisse et on calcule son image par la fonction linéaire : cela donne les coordonnées d'un point qui est sur la droite)

- La représentation graphique de f est la droite qui passe par l'origine et par $(1; 2)$
- La représentation graphique de g est la droite qui passe par l'origine et par $(2; -1)$

III. Déterminer l'expression d'une fonction linéaire

Méthode 1 : *En connaissant un nombre et son image*

Déterminons la fonction linéaire f sachant que $f(2) = -7$.

f est de la forme $f(x) = ax$
On sait que $f(2) = -7$ donc $2 \times a = -7$ donc $a = -3,5$.
donc $f(x) = -3,5x$

Méthode 2 : *En connaissant un point de sa représentation graphique*

Déterminons la fonction linéaire g dont la représentation graphique passe par le point M de coordonnées $(-3; 5)$.

g est de la forme $g(x) = ax$
M appartient à la droite donc $g(-3) = 5$ donc $-3 \times a = 5$ donc $a = \frac{-5}{3}$.
donc $g(x) = \frac{-5}{3}x$